ECON 2200: Summer, hjørneløsninger og ligningssystemer - handout

Kjell Arne Brekke

May 3, 2011

1 Summer

1.1 Notasjon

Summen av de ti første oddetallene blir:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$$

Hva med summen av de 300 første oddetallene? Nå blir det tungvint å skrive alle. Vi kunne droppe dem i midten,

$$1 + 3 + 5 + 7 + .. + 599 = 90000$$

men det er ikke alltid opplagt hva som skal stå der vi har satt ..., vi trenger en mer presis skrivemåte.

Oddetall nummer i er lik $2i - 1$.Vi kan da skrive summen av de 100 første oddetallene som

$$\sum_{i=1}^{100} (2i - 1)$$

Tegnet $\sum$ er en stor gresk S og står for sum. Under står det at "summasjonsvariabelen starter på $i = 1$ og over er det angitt hvor den ender, vi går altså helt til $i = 100$. De tallene vi skal legge sammen er altså oddetallene $(2i - 1)$.

Oppgave 1 *Regn ut* $(2i - 1)$ *for alle heltall* i *fra* 1 *til* 10*, og forviss deg om at dette gir oddetall.*

Oppgave 2 *Skriv summen 1+4+9+16+25+36 med summasjonsnotasjon. (Hint: merk at alle kan skrives på formen* i^2*.)*

1.2 Geometriske rekker

En for for sum som er viktig i økonomi er summen av geometriske rekker. En geoemtrisk rekke er en rekke tall der neste tall er a ganger så stor som forrige, for en eller annen a. For eksempel er nåverdien av en konstant innbetaling av 1000 kroner i året over 10 år lik

$$\begin{aligned} & 1000\left(1+\frac{1}{1+r}+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2+...\left(\frac{1}{1+r}\right)^9\right) \\ = & 1000\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i \end{aligned}$$

Her er $a=\frac{1}{1+r}$, men la oss starte med summen av en enklere geometrisk rekke hvor hvert tall er det dobbelte av forrige

$$\begin{aligned} S &= 1+2+4+8+16 \\ &= \sum_{i=0}^{4} 2^i \end{aligned}$$

Merk at om vil ganger alt med $a=2$ får vi

$$2S = 2+4+8+16+32$$

Vi ser at det er bare det første og det siste tallet som er ulikt, så når vi tar differansen kansellere de fleste leddene.

$$\begin{aligned} 2S-S &= \_\_\_+2+4+8+16+32 \\ & \quad -1-2-4-8-16 \\ &= 32-1=31 \end{aligned}$$

Oppgave 3 *Bruk samme metode til å regne ut summen*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{10} 2^i \\ &= 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024 \end{aligned}$$

2 Hjørneløsninger.

Finn maksimum for funksjonen

$$f(x) = 10+3x \text{ med definisjonsområde } 0 \leq x \leq 10.$$

Denne funksjonen er strengt voksende, så x skal være så stor som mulig, men definisjonsområdet går bare opp til $x=10$ Så funksjonen oppnår sitt maksimum for $x=10$, selv om $f'(x) \neq 0$. Siden løsningen er i "hjørnet" av definisjonsområdet kaller vi det en

hjørneløsning. Det motsatte er en "**indre**" løsning, der vil alltid førsteordebetingelsen gjelde.

Betrakt en konsument med nyttefunksjon

$$u(c_1, c_2) = 4c_1 + c_2$$

og budsjettbetingelse

$$c_1 + c_2 = 10$$

Nå er

$$c_2 = 10 - c_1$$

som kan settes inn i nyttefunskjonen

$$\begin{aligned} u &= 4c_1 + 10 - c_1 \\ &= 3c_1 + 10 \end{aligned}$$

Siden vi snakker om konsum må $c_1 \geq 0$, og $c_2 \geq 0$. Det siste betyr at

$$\begin{aligned} 10 - c_1 &\geq 0 \\ c_1 &\leq 10 \end{aligned}$$

Med andre ord

$$0 \leq c_1 \leq 10$$

Så vi ser vi har samme problem som over og maksimum er gitt ved $c_1 = 10$, selv om det ikke tilfredsstiller en førsteordensbetingelse.

Oppgave 4 *Tegn i samme figur både budsjettlinjen og indifferenskurven gjennom optimum, for tilfellet ovenfor.*

3 Systemer av ligninger (NB: Sydsæter 12.11)

Betrakt et typisk nyttemaksimeringsproblem (hvor vi antar indre løsning)

$$\max u(c_1, c_2)$$

med bibetingelse fra budsjettbetingelsen

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = m \tag{1}$$

Vi kan løse det med Lagranges metode

$$L = u(c_1, c_2) - \lambda (p_1 c_1 + p_2 c_2 - m)$$

som gir to betingelser for stasjonærpunktene

$$u'_{c_1}(c_1, c_2) = \lambda p_1 \tag{2}$$

$$u'_{c_2}(c_1, c_2) = \lambda p_2 \tag{3}$$

De 3 - tre - ligningene som har fått nummer kan nå brukes til å bestemme 3 - tre - ukjente c_1, c_2, og λ. Dette er et eksempel på **telleregelen:** Vi trenger normalt like mange ligninger som ukjente for å få bestemt alle ukjente.

Jeg skriver her 'normalt', for regelen gjelder ikke alltid. Eksempel:

$$x^2 = -4$$

Her er det en ligning og en ukjent, men det finnes likevel ingen løsning (om vi krever at x er reell).

Om vi har flere ligninger enn ukjente vil vi normalt heller ikke ha en løsning, f.eks.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 5 \\ y - x &= 2 \end{aligned}$$

(De to første ligningene har løsning $y = 2$ og $x = 1$ men det strir mot den siste ligningen. Det finnes altså ingen verdier av x og y som løser alle ligningene.)

Om vi har færre ligninger enn ukjente kan vi ofte velge en av de ukjente fritt. Ta et eksempel med en ligningen

$$x + y^2 = 5$$

Om vi her velger $x = 1$ kan vi ikke velge y for det følger at $y = 2$ men vi kan også velge $x = -4$ da må $y = 3$ eller vi kan velge y f.eks. $y = 1$ men kan da ikke velge x som blir $x = 3$. Når vi kan velge en variabel og resten følger automatisk, sier vi at vi har èn **frihetsgrad**.

Oppgave 5 *Om vi velger $x = -11$ hva må y være? Kan vi velge $x = 9$?*